8

# الباب الثامن

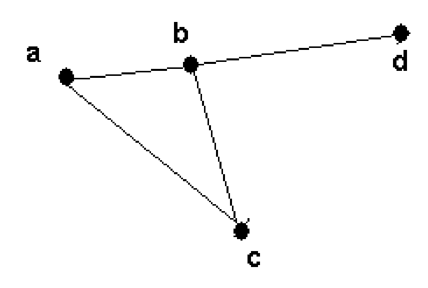
# الأشكال Graphs

## 8.1 مقدمة

ندرس في هذا الباب موضوع (الأشكال graphs) ، والشكل هو عبارة عن مجموعة من الرؤوس vertices (تسمى أيضا العقد) مرتبطة بخطوط تسمى الحواف edges (أو الأضلع). وتأتي أهمية موضوع الأشكال من استخدامها في توضيح العلاقات وتراكيب الشبكات إلى جانب تطبيقات أخرى مهمة.

## 8.2 أنواع الأشكال

إذا افترضنا أن لدينا شبكة من الحواسيب مرتبطة ببعضها كما في الشكل 8.2.1




الشكل 8.2.1 شكل بسيط simple graph

فإننا نلاحظ في هذا الشكل أنه:

1- يوجد بين كل رأس والآخر حافة واحدة على الأكثر. أي أن بعض الرؤوس مرتبطة بحافة واحدة وبعضها غير مرتبط.

2- لايوجد حافة بين الرأس ونفسه.

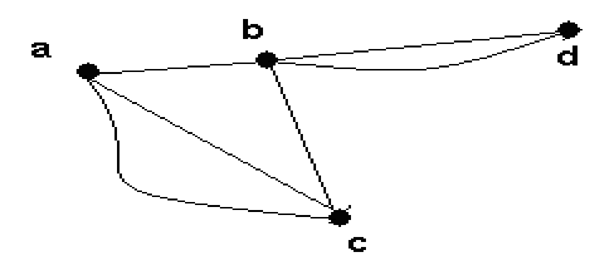
هذا الشكل يعتبر مثالا لشكل من النوع البسيط simple graph. رياضيا يمكن تعريف الشكل البسيط بأنه علاقة ثنائية E على الفئة V حيث:

$$V = \{v_1, v_2, , v_3, \ldots, \ , v_n\}$$

$$E = \{ (u, v) : u, v \in V,\ u \neq v\}$$

لاحظ في الشكل البسيط أن الحافة (u, v) هي نفسها الحافة (v, u).

أحيانا نجد أن هناك بعض الأشكال بها أكثر من حافة تصل بين عقدتين (رأسين) وهذا يحدث مثلا عند وجود ازدحام البيانات في شبكات الحاسوب أو ازدحام المركبات الآلية في حالة شبكات الطرق. في هذه الحالة يسمى الشكل بالمتعدد multigraph كما في الشكل 8.2.2 .




الشكل 8.2.2 شكل متعدد multigraph

**<u>ملاحظة:</u>**

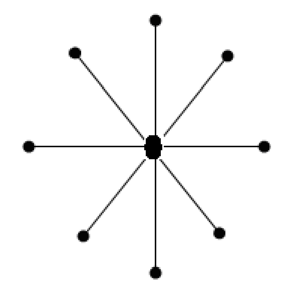
اذا كان الشكل يحتوي على حواف متعددة multiple edges وكذلك يحتوي على حلقات loops بين الرأس ونفسه فانه في هذه الحالة يسمى شكل زائف pseudograph.

# 8.3 تطبيقات الأشكال applications of graphs

من التطبيقات المهمة للأشكال استخدامها لتمثيل هيكلية شبكة الحاسوب. وندرس الآن أهم هذه الهيكليات:

1) **هيكلية النجمة Star Topology**

يبين الشكل 8.3.1 مجموعة من العقد (تمثل حواسيب أو أجهزة ملحقة) مرتبطة مع بعضها عن طريق جهاز تحكم مركزي يسمى المبدّل switch أو المجمّع hub. هذا الشكل يسمى بهيكلية النجمة.



Star Topology هيكلية النجمة

الشكل 8.3.1

لاحظ في الشكل الحلقي أن الحواف هي:

$(v_1, v_2), (v_1, v_3), \ldots, (v_1, v_n)$

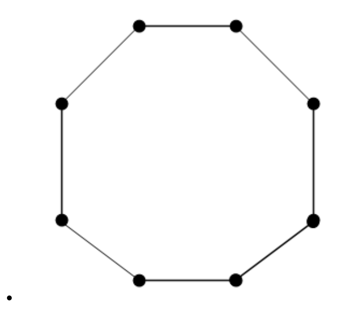
حيث $v_1$ هو الرأس الموجود في مركز الشبكة (المجمع hub) و

$v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$

هي باقي الرؤوس في هذا الشكل.

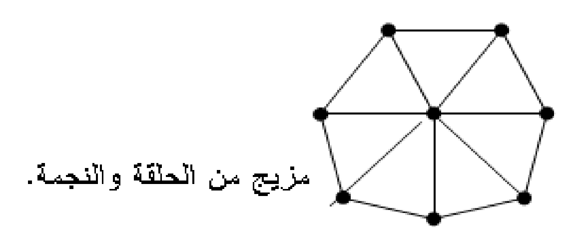
2) هيكلية الحلقة **Ring Topology**

في هذه الهيكلية، كل حاسوب (أو جهاز) مرتبط مع جهازين آخرين مجاورين كما في الشكل 8.3.2 .



الشكل 8.3.2 هيكلية الحلقة ring topology

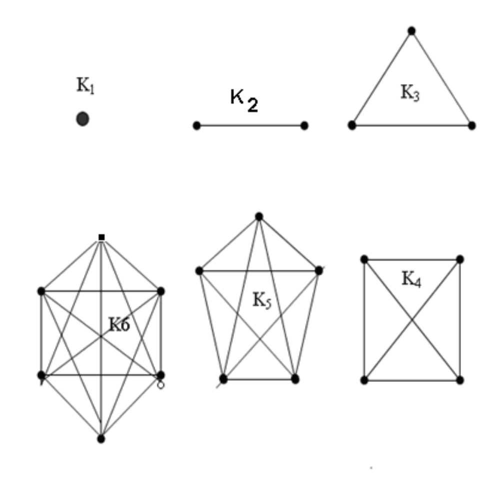
3) هيكلية المزيج **Hybrid**




يسمى هذا النوع بشكل العجلة wheel حيث يوجد فيه اتصال بين الرؤوس على شكل حلقي ونجمي في نفس الوقت.

## 8.2 الأشكال الكاملة Complete Graphs

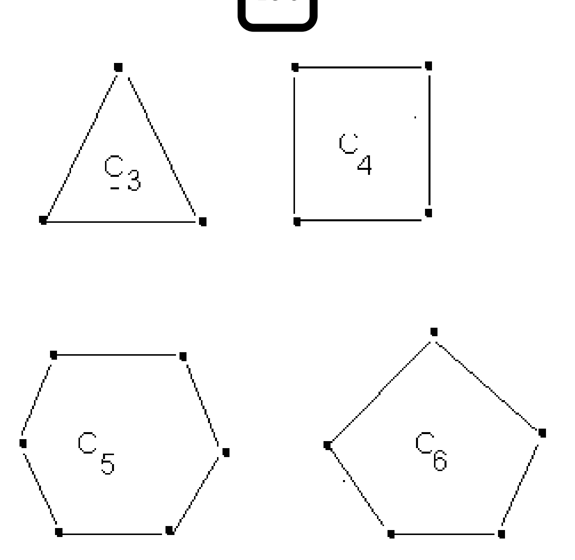
يوجد في هذا النوع من الأشكال حافة (ضلع) بين كل زوج من الرؤوس . أي أن كل رأس متصل بالآخر بحافة كما مبين بالأشكال التالية والتي يرمز لها عادة بالرمز $K_n$ حيث n هو عدد الرؤوس بالشكل.




الأشكال الكاملة

2- **الأشكال الحلقية Cycles** ونرمز لها بالرمز $C_k$

حيث k هو عدد الرؤوس ويساوي عدد الحواف كما في الأشكال التالية:




الأشكال الحلقية Cycles

فإذا رمزنا في الشكل الحلقي $C_n$ للرؤوس بالرموز

$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}, v_n$

فإن الحواف في هذا الشكل هي :

$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n)$$

**ملاحظة:**

في النوعين السابقين نلاحظ أنه لا يوجد اتجاه معين في الحافة التي تربط بين رأسين. يسمى هذا النوع بالشكل **غير الموجّه** undirected graph. ولكن كما درسنا سابقا هناك أشكال لابد من تحديد الاتجاهات على حوافها وتسمى هذه الاشكال بالأشكال **الموجّهة** directed graphs.

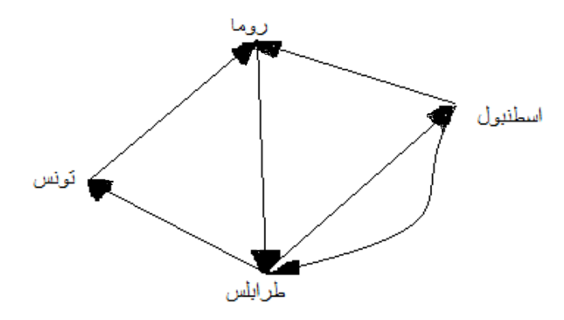
مثال لشكل موجه directed graph

خطوط جوية لديها رحلات كالاتي:

(طرابلس، تونس) ، (طرابلس، اسطنبول) ، (تونس، روما) ، (روما، طرابلس) ، (اسطنبول، روما) (اسطنببول، طرابلس)

ارسم شكلا يبين هذه الرحلات.

الشكل التالي يبين خطوط هذه الرحلات. لاحظ أن الشكل موجه directed ومتعدد multgraph




## 8.4 نظرية التصافح handshaking theorem

**تعريفات**

1- الرأس u والرأس v يعتبران متجاورين ( adjacent ) إذا وجد بالشكل حافة تربط بينهما.

2- درجة الرأس هي عبارة عن عدد الحواف التي تتصل به.

فمثلا في الشكل الدوري نجد أن درجة كل راس تساوي 2 ، ونكتبها رياضيا على الصورة:

$$Deg( v ) = 2$$

**مبرهنة**

إذا كان الشكل يحتوي على حواف عددها e ورؤوس عددها n فإن مجموع درجات الرؤوس يساوي ضعف عدد الجواف. أي أن

$$2e = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \ldots + \deg(v_n)$$

كمثال لهذه النظرية (التي تسمى نظرية التصافح) نجد في الشكل $C_2$ أن $n=3$ و وأن $e=3$

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \deg(v_3) = 2 + 2 + 2 = 6$$

وهذا فعلا يساوي $2e = 2(3)$

وكمثال آخر نستطيع تطبيق هذه النظرية لنحصل على عدد الحواف في الشكل $K_6$.
ففي هذا الشكل نلاحظ أن درجة كل رأس هي 5 وأن عدد الرؤوس هو 6 وبالتالي فإن

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \ldots + \deg(v_6) = 6(5)= 30 = 2e$$

أي أن عدد الحواف $= e = 30/2 = 15$

## 8.5 تمــارين (14)

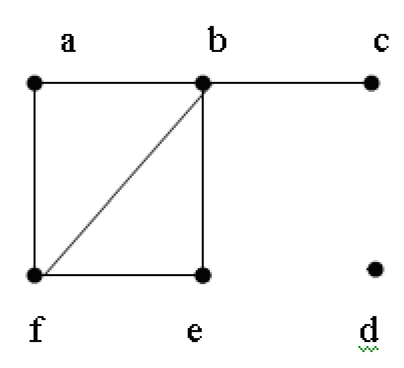
1) أوجد

(أ) عدد العقـد v

(ب) عدد الحـواف e

(ج) درجة كل عقـدة deg

في الشكل التالـي:



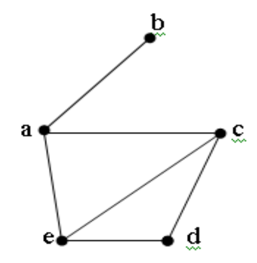

2) في تمرين (1) حقق نظرية التصافح (أي أن $\sum deg(v) = 2e$)

## 8.6 تمثيل الأشكال Representing Graphs

يعتمد تمثيل الشكل باستخدام الجدول على ما إذا كان الشكل موجها أو غير موجه.

1) فـي الحالـة الأولـى (أي الشكل البسيط غير الموجّـه) يمكـن تمثيلـه بإستخدام قائمـة الجوار (Adjacency List) أي قائمة العقد المجاورة.

**مثال** : الشكل البسيط التالي:

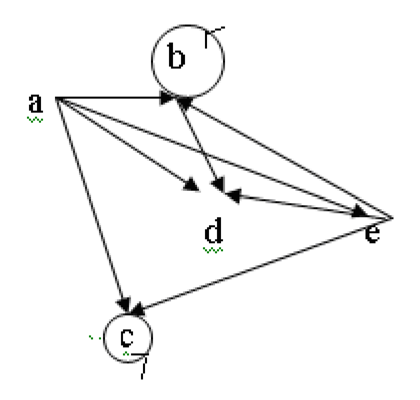


يمكن تمثيله كما في الجدول التالي :

| Vertex<br>الرأس | Adjacency vertices<br>الرؤوس المجاورة |
|---|---|
| a | b, c , e |
| b | a |
| c | a, d, e |
| d | c, e |
| e | d, a, c |

2) في حالة تمثيل **الشكل الموجّه** Directed Graph نستخدم جدولا يبين بداية ونهاية كل حافة كما في المثال التالي .

**مثال :** الشكل الموجّه التالي:




يمكن تمثيله بالجدول التالي

| Initial vertex<br>عقدة البداية | Terminal vertices<br>عقد النهاية |
|---|---|
| a | b, c, e, d |
| b | b, d |
| c | c |
| d | |
| e | b, c, d |

1) تمثيل الشكل البسيط باستخدام **مصفوفة الجوار Adjacency Matrix**

وهي مصفوفة $a_{ij}$ عناصرها إما واحد أو صفر .

في حالة وجود حافة بين $v_i$ و $v_j$ فإن $a_{ij} = 1$ وإلا فإن $a_{ij} = 0$. أي أن

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ if } (v_i , v_j) \text{ is an edge} \\ 0 \quad \text{Otherwise} \end{cases}$$

حيث $v_i$ هي عقد الشكل البسيط G.

**مثال** : ما هي مصفوفة الجوار للشكل التالي :

الاجابة: مصفوفة الجوار لهذا الشكل هي:

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 1 | 1 |
| b | 1 | 0 | 1 | 0 |
| c | 1 | 1 | 0 | 0 |
| d | 1 | 0 | 0 | 0 |

لاحظ أن الشكل **بسيط** لذلك فإن **المصفوفة متماثلة لأن وجود حافة بين a و b يعني أيضا وجود حافة بين b و a .**

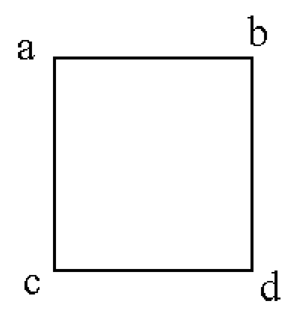
**مثال** : ارسم شكل مصفوفة الجوار التالية

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**الإجابة** : المصفوفة متماثلة والقطر أصفار لذلك فهي تمثل شكلا بسيطا. نضع أسماء للرؤوس أفقيا وعموديا كما يلي:

| | a | b | c | d |
|---|---|---|---|---|
| a | 0 | 1 | 1 | 0 |
| b | 1 | 0 | 0 | 1 |
| c | 1 | 0 | 0 | 1 |
| d | 0 | 1 | 1 | 0 |

والآن يمكن أن نرسم الشكل المطلوب كما يلي :

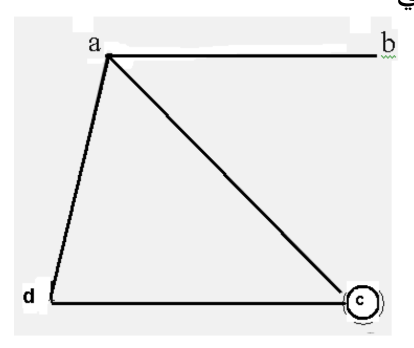



مثال : ارسم الشكل لمصفوفة الجوار التالية adjacency matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث العنصر $a_{ij}$ يمثل عدد الحواف بين $v_i$ ، $v_j$

الإجابة : بوضع (a, b, c, d) أفقيا وعموديا حول المصفوفة ،
نحصل على الشكل التالي :




لاحظ أن المصفوفة لهذا الشكل متماثلة ولكن القطر ليس كله أصفار بل يوجد 1 يقابل الرأس c لذلك وضعنا دائرة صغيرة حوله لنبين وجود حافة منه وإليه.

## تمثيل الشكل الموجه Directed Graph (Digraph)

سبق وأن درسنا في الباب السابع تمثيل الأشكال الموجهة حيث استخدمنا المصفوفة

$$a_{ij} = 1$$

لتعني

$$v_i \longrightarrow v_j$$

## تمثيل الشكل المتعدد Multi graph

في هذه الحالة لن تكون المصفوفة ثنائية لأن

$a_{ij}$ = number of edges from $v_i$ To $v_j$

أي أن عدد الحواف من $v_i$ إلى $v_j$ = $a_{ij}$

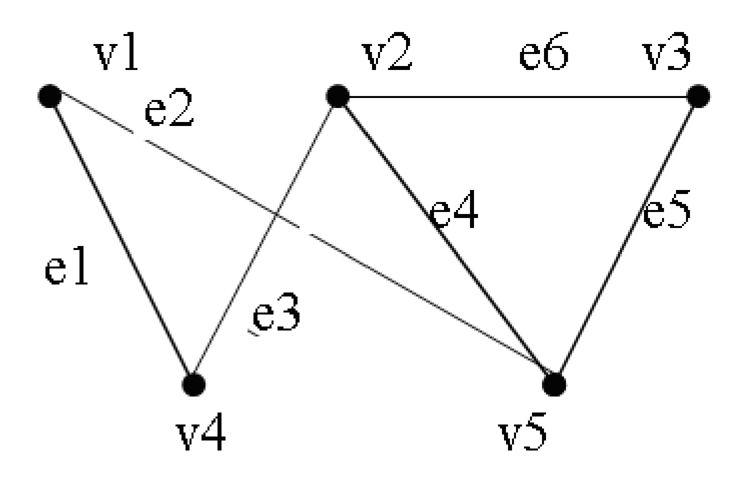
## <u>مصفوفة السقوط</u> Incidence Matrix

هذه طريقة أخرى لتمثيل الأشكال . هنا نستخدم المصقوقة M حيث

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{عندما } e_j \text{ تمر على } v_i) \\ 0 & (\text{غير ذلك}) \end{cases}$$

حيث $v_i$ هو الرأس vertex(i) ، $e_j$ هو الحافة edge(j) .

**مثال:** أوجد مصفوفة السقوط M للشكل التالي:

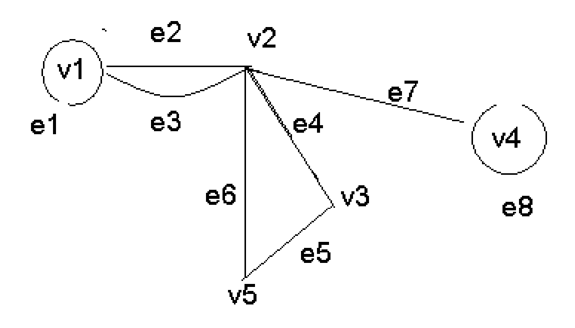



الاجابة: نلاحظ هنا وجود 5 رؤوس و 6 حواف. لذلك نكتب المصفوفة على النحو التالي:

| | e1 | e2 | e3 | e4 | e5 | e6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| v1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| v2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| v3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| v4 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| v5 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |

= incidence matrix

**مثال :** مثّل الشكل التالي بمصفوفة السقوط incidence matrix



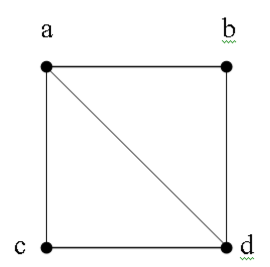

**الإجابة :**

| | e1 | e2 | e3 | e4 | e5 | e6 | e7 | e8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| v1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| v2 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| v3 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| v4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| v5 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |

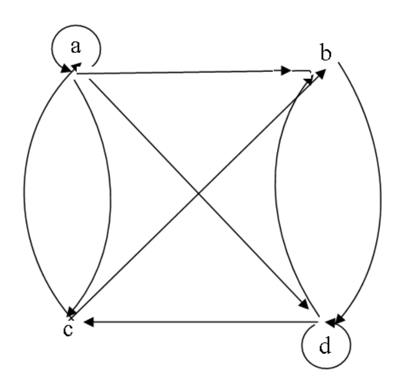
# 8.7 تمارين (15)

1- باستخدام قائمة الجوار adjacency List مثل الشكلين التاليين :

(أ)




(ب)




2- مثل الشكل في تمرين 1-ب بمصفوفة الجوار adjacency matrix

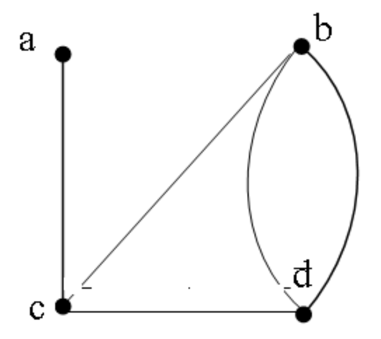
3- مثل الشكل الكامل $k_4$ بمصفوفة الجوار.

4- مثل الشكل الدوري $C_4$ بمصفوفة الجوار.

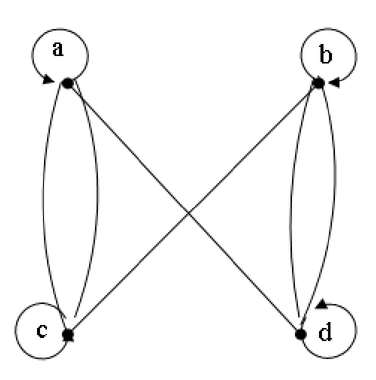
5- ارسم الشكل الذي تمثله مصفوفة الجوار التالية adjacency matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6- مثل الشكل التالي بمصفوفة الجوار



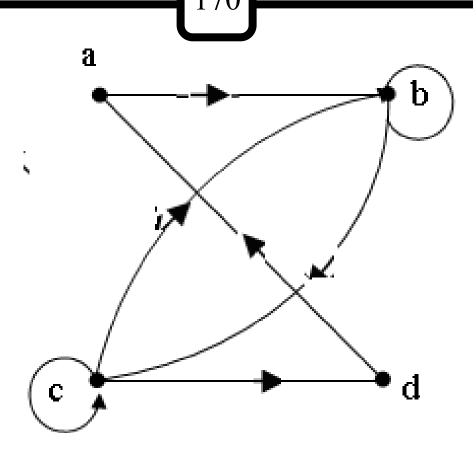

7- مثل الشكل التالي بمصفوفة الجوار



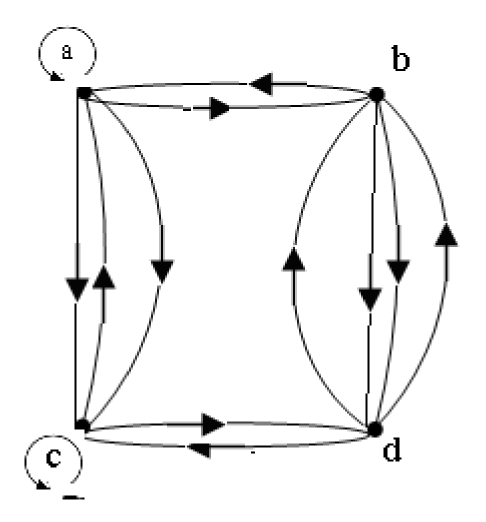

8- ارسم شكلا غير موجه تمثله مصفوفة الجوار التالية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9- أوجد مصفوفة الجوار للشكل التالي




10- أوجد مصفوفة الجوار للشكل التالي




11- أوجد الشكل الذي تمثله مصفوفة الجوار التالية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

12- استخدم مصفوفة السقوط لتمثيل الشكل في تمرين (6).

13- استخدم مصفوفة السقوط لتمثيل الشكل في تمرين (7).

## 8.8 تمثيل العلاقات بالأشكال الموجهة Directed Graph

يمكن تمثيل العلاقة R برسم سهم (edge) يمثل العنصر (الزوج المرتب)(a,b) على النحو التالي:

a ⟶ b .

edge or arc

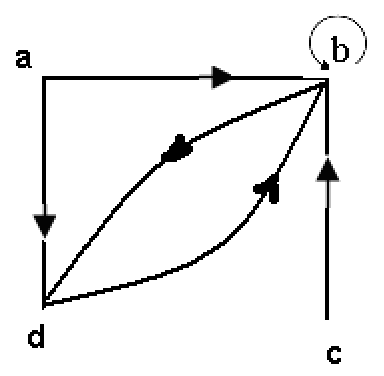
حيث a تسمى ( initial vertex) العقدة الابتدائية

و b تسمى (terminal vertex) العقدة النهائية

**مثال:** ارسم شكلا موجها يبين العلاقة

R = {(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, b), (d, b)}

الإجابة:

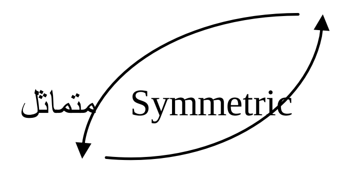



شكل موجه directed graph للعلاقة R

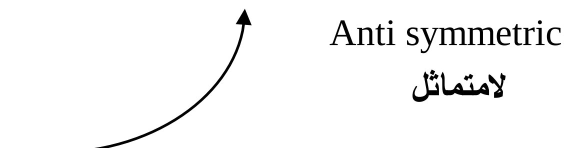
**<u>ملاحظات:-</u>**

(1) إذا كانت العلاقة من نوع انعكاسي reflexive نجد دورة loop حول كل عقدة

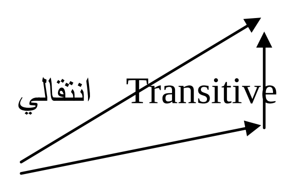
(2) إذا كانت العلاقة من نوع متماثل نجد أن لكل سهم في الشكل الموجه يوجد سهم معاكس له كما يلي:



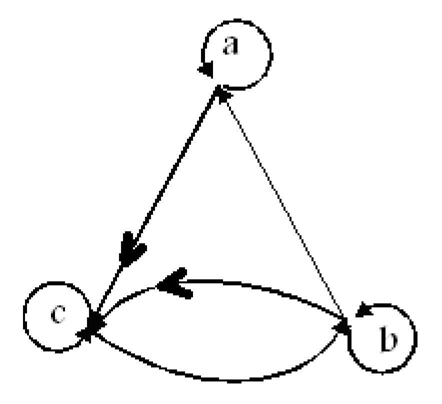

(3) إذا كانت العلاقة من نوع لا متماثل لا يكون للسهم سهم آخر معاكس له



(4) إذا كانت العلاقة من نوع انتقالي نجد أن وجد سهمان الأول من النقطة x الى النقطة y ، والثاني من العقدة y إلى العقدة z ، فانه يوجد سهم في الشكل من x إلى z.



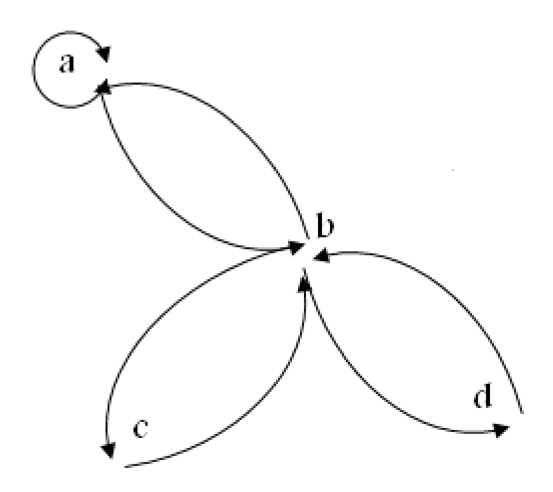

**مثال:** هل العلاقة التالية انعكاسية أو متماثلة أو لا متماثلة أو انتقالية ؟




من الواضح أن هذه العلاقة انعكاسية حيث يوجد دورة حول كل عقدة . ولكنها ليست متماثلة حيث مثلا نجد سهما من b إلى a ولا يوجد سهم من a إلى b. وفي نفس الوقت هي ليست لا متماثلة antisymmetric حيث يوجد سهمان متعاكسان بين العقدتين a , b.

وهي أيضا ليست انتقالية حيث نجد سهما من a إلى c وسهما من c إلى b ولا يوجد سهم من a إلى b.

**مثـال:** مـا نـوع العلاقـة التـي يمثلهـا الشـكل التـالي ؟ هـل هـي انعكاسـية؟ متماثلـة؟ انتقالية؟



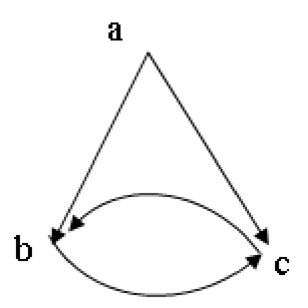

هذه العلاقة ليست انعكاسية reflexive ولكنها متماثلة symmetric حيث نجد أن لكل سهم يوجد سهم معاكس له في الاتجاه .
وهي ليست انتقالية transitive حيث نجد مثلا أن (a, b) و (b, c) تنتميان للعلاقة ولكن (a,c) لا تنتمي للعلاقة .

## 8.9 تمارين(16)

(1) مثل العلاقات باستخدام الأشكال الموجهة.

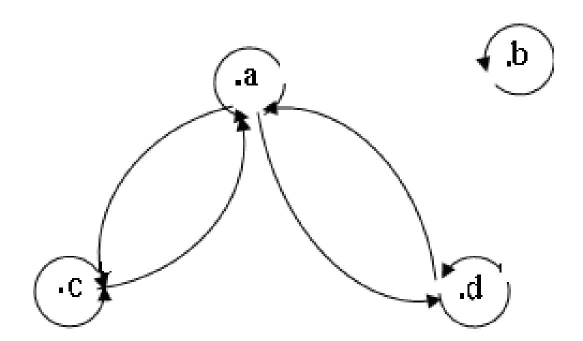
a) {(1,1),(1,2),(1,3)}
b) {(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)}
c) {(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)}
d) {(1,3),(3,1)}

(2) أكتب الأزواج المرتبة التي يمثلها الشكل التالي:

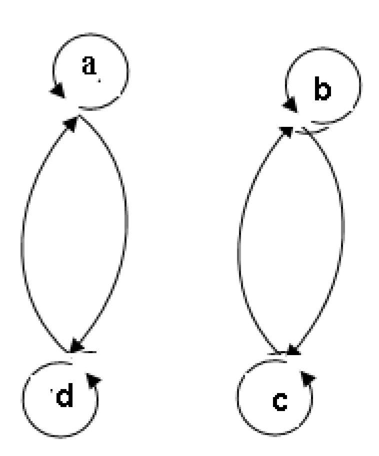



3- أي من العلاقات التالية علاقة تكافؤ equivalence relation

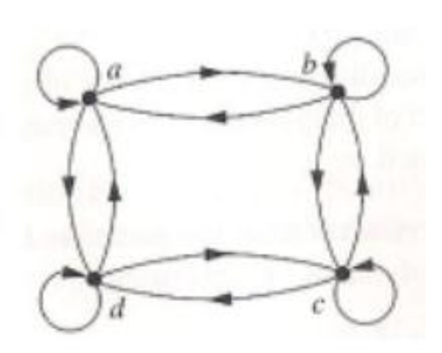
(أ)




(ب)

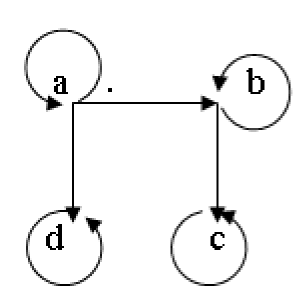



(ج)

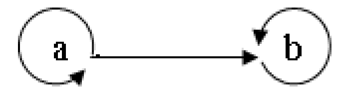


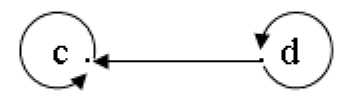

4) أي من العلاقات التالية تعتبر مرتبة جزئيا poset ؟

ا-




ب-



# 8.10 الاتصـــال Connectivity

كيف تتصل نقطة في الشبكة بأخرى؟ هل هناك (مسار) يصل بينهما؟ وما معنى المسار وما هي أنواعه؟ هذا ما نريد دراسته هنا؟

المسار هو الطريق الذي يوصل نقطة بأخرى في الشبكة. مثلا اذا كنا نتعامل مع شبكة طرق فالمسار من مدينة طرابلس الى مدينة غريان هو أي طريق يوصل بينهما. طبعا قد يوجد أكثر من طريق بينهما، وقد يمر الطريق على مدن أخرى. في هذه الحالة نحدد الطريق بتحديد المدن التي يمر عليها، كأن نقول المسار: (طرابلس ، السواني، العزيزية ، غريان) ، واذا وجد أكثر من طريق بين نقطة وأخرى multigraph في المسار فيجب تحديد كل طريق بين المدينتين . وللتوضيح نقوم بعمل تعريف دقيق كالاتي:

**تعريفات :**

(1) المسار Path (من $V_0$ إلى $V_n$)

المسار (في الشكل المتعدد multigraph) يتكون من متتابعة (sequence) من العقد والحواف على الصورة : $(V_0, e_1, V_1, e_2, \dots, e_n, V_n)$
حيث كل حافة $e_i$ تصل بين الرأس $V_i$ والرأس $V_{i-1}$

(2) <u>طول</u> المسار

طول المسار هو عدد الحواف الموجودة به ، أي أن المسار
$(V_0, e_1, V_1, e_2, \dots, e_n, V_n)$
طوله هو n .

ويمكن الرمز للمسار باستخدام حوافه فقط ، أي

$e_1, \; e_2, \ldots, e_n$

أو باستخدام العقد فقط على النحو :

$V_0, \; V_1, \; \ldots, V_n$

بشرط ألا يحدث ذلك أي التباس.

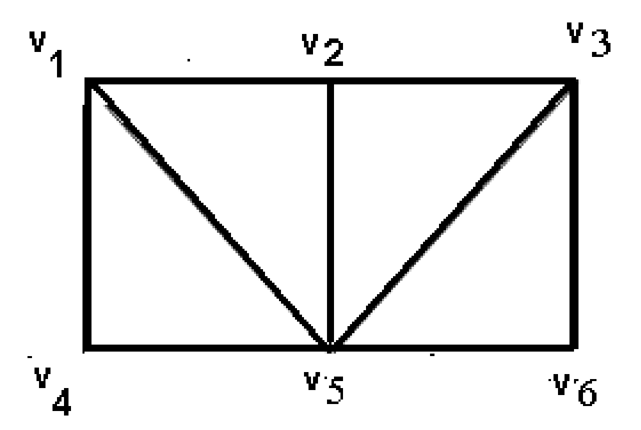
(3) المسار الدائري Circuit

يوصف المسار بأنه دائري إذا كان $V_0 = V_n$

(4) المسار البسيط simple path: هو مسار تكون فيه الحواف مختلفة (أي لا تكرار) يسمى أيضا بالممر .

**مثال:**

انظر إلى الشكل التالي، وأجب عن الأسئلة التالية:



ا- هل المتتابعة (V4,V1,V5,V2,V6) مسار ؟

ب- هل المتتابعة (V4,V1,V2,V5,V1,V2,V3,V6) تعتبر مسارا ؟

ج- هل المتتابعة في (ب) تعتبر مسارا بسيطا؟

د- هل المتتابعة (V4,V1,V5,V2,V3,V5,V6) مسارا بسيطا؟

هـ- هل المتتابعة في (د) مسار path ؟

و- أوجد مسارين من V4 إلى V6. أيهما أقصر؟

**<u>الإجابة :</u>**

ا- هذه المتتابعة تفترض وجود حافة بين V2 و V6 وهذا غير صحيح كما مبين بالشكل حيث لا يوجد حافة بين هاذين الرأسين. لذلك فهي لاتعتبر مسارا .

ب- بالنظر الى الشكل نجد أن بين كل رأسين في هذه المتتابعة يوجد حافة لذاك فهي تعتبر مسارا يبدأ من V4 وينتهي عند V6 .

ج- لا، لأن الحافة (V1,V2) متكررة مرتين في هذا المسار.

د- نعم ، حيث لا نجد استخدام حافة مرتين أو أكثر .

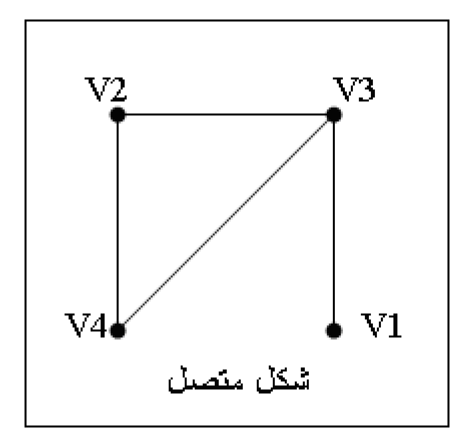
هـ- لا والسبب تكرر العقدة V5 في هذا المسار.

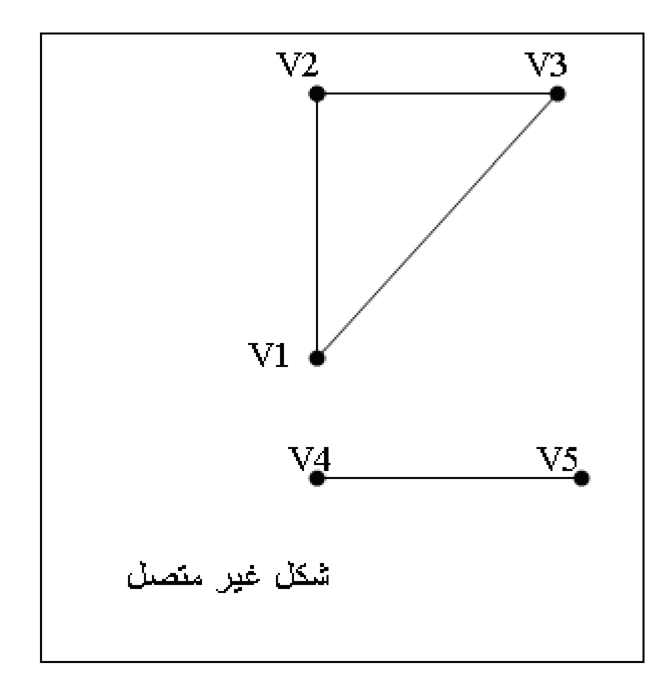
و- المسار الأول (V4,V5,V6)
المسار الثاني (V4,V1,V2,V3,V6)
في المسار الأول الطول = 2 (أي عدد الحواف) وفي المسار الثاني الطول = 4 لذلك فإن المسار الأول هو الأقصر .

**تعريف: الاتصال**

يسمى الشكل متصلا connected إذا وجد به مسار بين كل اثنين من رؤوسه .

**مثال :**



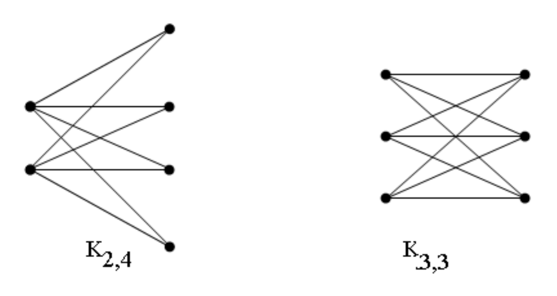



## 8.11 الأشكال ذات القسمين Bipartite

يقال أن الشكل G ذو قسمين إذا كانت عقده (أي رؤوسه) V يمكن تجزئتها إلى فئتين جزئيتين M , N بحيث أن كل حافة في G تصل عقدة من M مع عقدة من N .

وإذا كان كل عقدة في M متصلة بكل عقدة في N نقول أن الشكل كامل ذو قسمين ويرمز له بالرمز $K_{m,n}$ حيث m عدد العقد في M ، و n عدد العقد في N

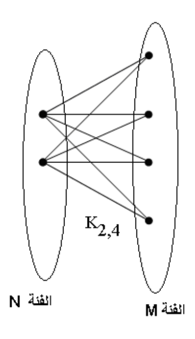
**مثال : الشكلان التاليان من الأشكال الكاملة ذات قسمين** bipartite




أشكال كاملة ذات قسمين

Complete bipartite

لأن في الشكل K(2,4) نستطيع تقسيمه الى قسمين M و N كما يلي:



حيث نجد أن كل عقدة في M متصلة بجميع عقد N . ويمكن تقسيم الشكل الآخر بنفس الطريقة.

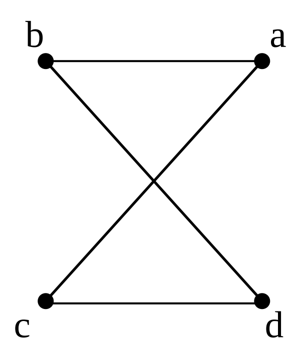
**عدد المسارات بين العقد**

**مبرهنة**

إذا كانت A هي مصفوفة الجوار للشكل G فإن عدد المسارات بطول r من العقدة $V_i$ إلى العقدة $V_j$ هو $B_{ij}$ حيث المصفوفة :

$$B = A^r$$

**مثال :** في الشكل التالي




كم عدد المسارت ذات طول 4 من a إلى d؟

الحل: أولا نوجد مصفوفة الجوار adjacency matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ثم نوجد المصفوفة

$$B = A^4 = A \times A \times A \times A$$

$$= A^2 \times A^2$$

أي أن

$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

أي أنه يوجد 8 مسارات ذات طول 4 من a إلى d

يمكن التأكد من ذلك بدراسة هذه المسارات مثل :

Path-1: (a,b,a,b,d)
Path-2: (a,b,a,c,d)
Path-3: (a,b,d,b,d)
Path-4: (a,b,d,c,d)
Path-5: (a,c,a,b,d)
Path-6: (a,c,a,c,d)
Path-7: (a,c,d,b,d)
Path-8: (a,c,d,c,d)

## 8.12 تمارين (17)

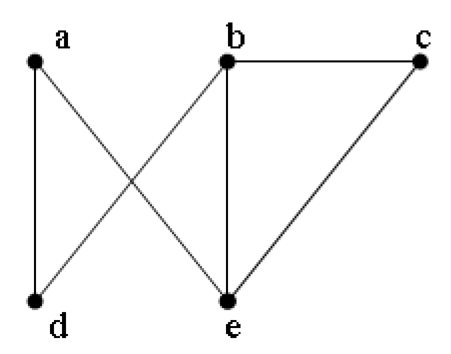
(1) في المتتابعات التالية بيّن

هل المتتابعة مسار ؟ هل المسار بسيط ؟ هل المسار دائري ؟

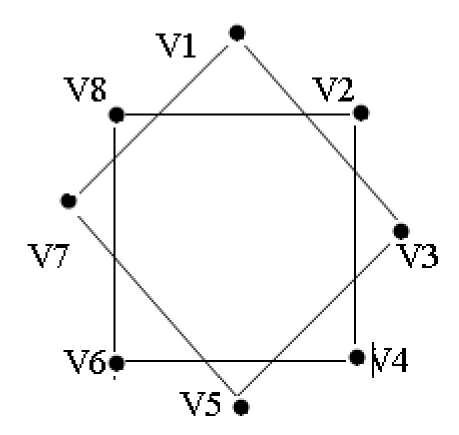
أوجد طول المسار.

a) (a,e,b,c,b)
b) (a,e,a,d,b,c,a)
c) (e,b,a,d,b,e)
d) (c,b,d,a,e,c)

حيث a , b , c , d , e عقد في الشكل التالي:




(2) هل الشكل التالي متصل ؟



(3) أوجد عدد المسارات بطول n بين عقدتين في الشكل K4 إذا كانت
a) $n = 2$
b) $n = 4$

## 8.13 الأشكال المستوية Planner Graphs

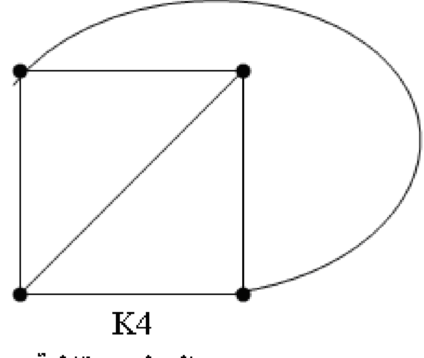
**<u>تعريف:-</u>**

يعتبر الشكل مستويا planner إذا كان بالامكان رسمه بدون أن تتقاطع حوافه ( No edges Crossing) .

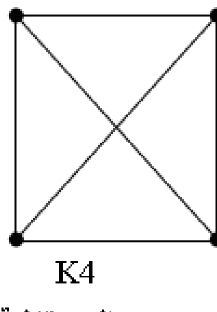
ويسمى الشكل الذي لا يوجد فيه تقاطع الحواف بالتمثيل المستوي للشكل Planner Representation (يسمى أيضا خريطة)

**مثال:** هل الشكل K4 مستوي ؟

الإجابة: نعم لأن K4 يمكن رسمه بدون تقاطع كما يلي :

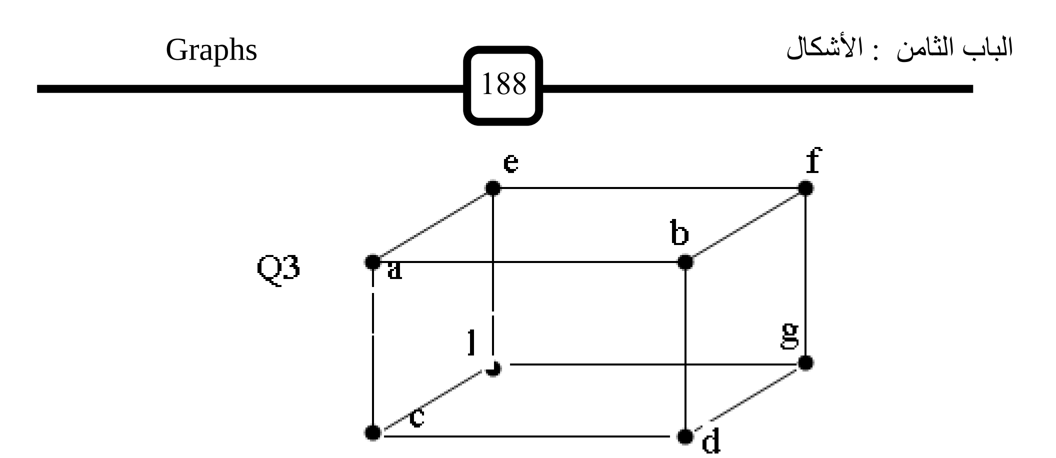


K4
حواف غير متقاطعة

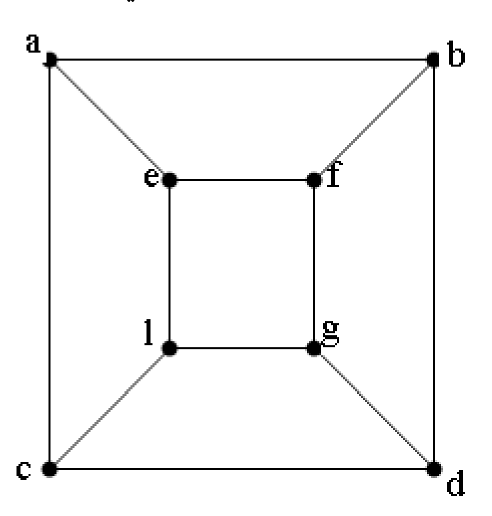


K4
حواف متقاطعة

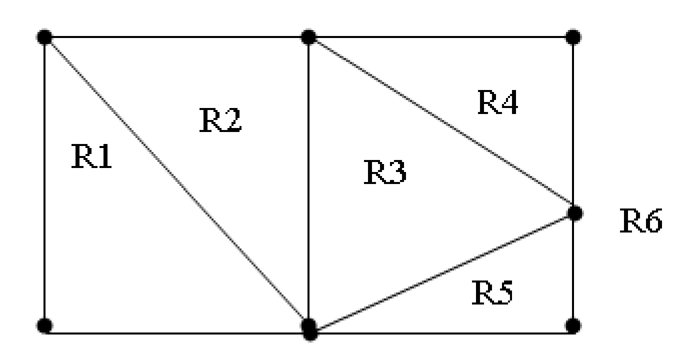
**مثال:** هل الشكل Q3 المبين أدناه مستوي؟




**الإجابة:** نعم لأن Q3 يمكن رسمه على النحو التالي




لاحظ أن التمثيل المستوي للشكل يقسم المستوى إلى مناطق متعددة . فمثلا الشكل التالي يقسم المستوى إلى 6 مناطق هي (R1,R2,R3,R4,R5,R6)




كما نلاحظ أن واحدة من هذه المناطق تكون غير محدودة Unbounded وهي في هذا الشكل المنطقة R6

**مبرهنة أويلر Euler's Formula**

في الشكل المستوي البسيط المتصل تكون عدد المناطق في خريطته (أي في تمثيله المستوى)

| |
|---|
| $r = e - v + 2$ |

حيث

| |
|---|
| r = عدد المناطق = number of regions |
| e = عدد الحواف = number of edges |
| v = عدد العقد = number of vertices |

للتأكد من هذه المبرهنة قم بعد المناطق في الأشكال المستوية المذكورة أعلاه وعد الرؤوس (العقد) والحواف والتعويض في صيغة أويلر .

**مثال :** افترض أن شكلا مستويا وبسيطا ومتصلا له 20 عقدة ، كل عقدة درجتها 3. كم عدد المناطق التي يقسمها التمثيل المستوي في هذا الشكل؟

الحل: نحتاج لحساب عدد الحواف في هذا الشكل ، ويمكن أن نستخدم نظرية التصافح.

$$2e = \sum deg(v)$$
$$= 20\ (3) = 60$$
$$e = 30$$

ثم نحسب عدد المناطق من صيغة أويلر:

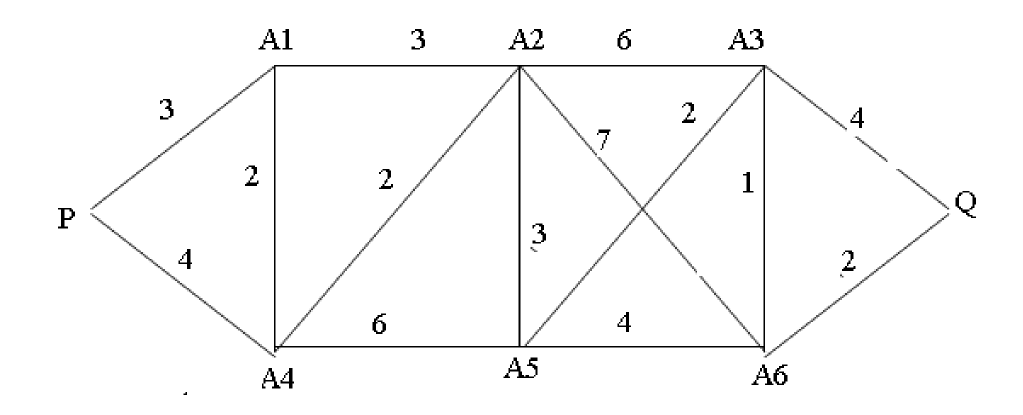
$$r = e - v + 2 = 30 - 20 + 2 = 12$$

## 8.14 الأشكال المميزة Weighted Graphs

الأشكال التي يوجد بها أرقام مخصصة لكل حافة تسمى أشكال مميزة weighed وهي تستعمل بصورة خاصة في الشبكات (سواء في شبكات الحاسوب أو الهاتف أو الطرق) والأرقام على الشكل قد تبين المسافات بين العقد أو زمن الاستجابة أو تكلفة الاتصال وما إلى ذلك .

تستخدم الأشكال المميزة في مسائل المسار الأقصر Shortest Path بين عقدتين.

**مثال:** في الشكل المميز التالي :




نجد أن المسار (P,A1,A2,A5,A3,A6,Q)

طوله (أو وزنه weight)

3 + 3 + 3 + 2 + 1 + 2 = 14

وهو أقصر طريق من P إلى Q .

مثلا إذا أخذنا طريقا آخر هو P,A1,A2,A3,Q

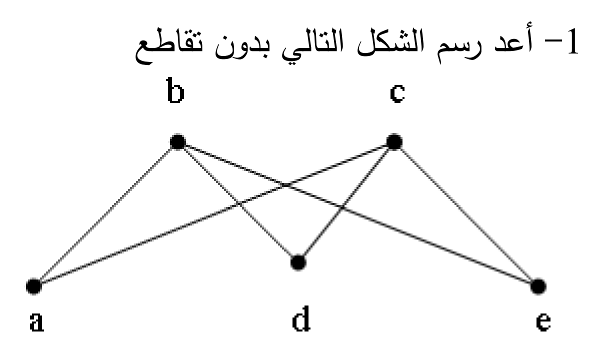
فإن طوله

3 + 3 + 6 + 4 = 16

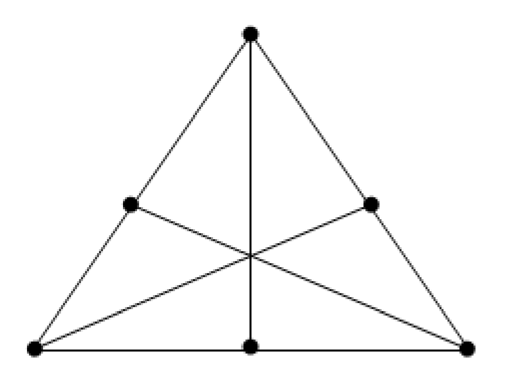
لإيجاد أقصر مسار بين عقدتين توجد العديد من الخوارزميات التي تؤدي هذا الغرض ، منها مثلا خوارزمية Dijkstre .

## 8.15 تمـــــارين (18)

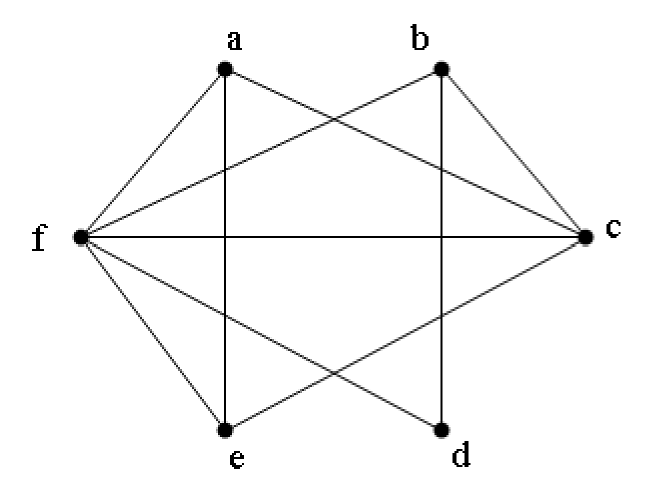
1- أعد رسم الشكل التالي بدون تقاطع




2- حاول إعادة رسم الشكل التالي بدون تقاطع؟ ماذا تلاحظ؟ هل الشكل مستوي؟



3- بين أن الشكل التالي مستوي




4- افترض أن لدينا شكلا مستويا ومتصلا له 6 عقد ،كل منها درجته تساوي 4 . كم عدد المناطق في خريطة هذا الشكل؟

-5- أوجد طول أقصر مسار بين a الى e ما هو هذا المسار ؟

a 1 b
2 5 3 8
c 3 d 4 e